

UNIVERSITÉ MOHAMMED V - AGDAL
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Filière Sciences de Matières Physiques (SMP4)
Module Mathématiques : Analyse (S4)



Cours d'Analyse

exosup.com

Séries numériques
Suites et Série de fonctions
Séries entières

A. Bourass, A. Ghanmi, N. Madi

(FSR 2009-2010)

Table des matières

1	Séries numériques	FSR / SMP(S4)	3
1.1	<u>Définitions et premières propriétés</u>		3
1.2	<u>Séries à termes positifs</u>		5
1.3	<u>Séries alternées</u>		9
2	Suites et Série de fonctions	FSR / SMP(S4)	10
2.1	<u>Rappels</u>		10
2.2	<u>Suites de fonctions</u>		11
2.3	<u>Séries de fonctions</u>		14
3	Séries entières	FSR / SMP(S4)	17
3.1	<u>Définition et premières propriétés</u>		17
3.2	<u>Développement en série entière</u>		18

Chapitre 1

Séries numériques

1.1 Définitions et premières propriétés

Definition 1.1.

1) On appelle série à termes dans $\mathbb{K} = (\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ tout couple $((u_n)_n, (S_n)_n)$ forme d'une suite (u_n) d'éléments de \mathbb{K} et de la suite (S_n) définie par

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k$$

u_n est appelé le terme général de la série et S_n est la somme partielle d'ordre n . On écrira formellement $\sum u_n$ ou lieu de $((u_n)_n, (S_n)_n)$.

2) La série $\sum u_n$ converge, ou est convergente, si et seulement si (S_n) est convergente

et $S = \lim S_n$ est appelée la somme de la série $\sum u_n$. On note alors $S = \sum_n^{+\infty} u_n$.

La série diverge (ou est divergente) si elle ne converge pas.

Proposition 1.2 (Condition nécessaire). Si la série $\sum u_n$ converge alors $u_n \longrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow +\infty$.

Preuve : Ceci résulte du fait que

$$u_n = S_n - S_{n-1} \longrightarrow S - S = 0$$

où $S_n = \sum_{k \leq n} u_k$. □

Exemples 1.3.

1. La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$:

Pour n assez grand, on a bien $\ln(n) \geq \ln(2)$. Alors, si on note par m la partie

entière de $\frac{\ln n}{\ln 2}$, $m = E(\frac{\ln n}{\ln 2})$, on obtient $m \leq \frac{\ln n}{\ln 2} < m + 1$ et donc $m \ln(2) \leq \ln(n)$. En appliquant e^x qui est une fonction croissante, on voit que

$$2^m \leq n.$$

Par suite

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^{2^m} \frac{1}{k}.$$

Or

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2^m} \frac{1}{k} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{m-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^m}\right) \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + \dots + 2^{m-1} \frac{1}{2^m} = 1 + \frac{m}{2} \longrightarrow \infty \end{aligned}$$

Par conséquent $S_n \geq 1 + \frac{m}{2}$. Il en résulte donc que la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

Résultat fondamental : La série $\sum \frac{1}{n}$ est divergente.

2. Série géométrique $\sum_{n \geq 0} a^n$:

La suite des sommes partielles est donnée par $S_n = 1 + a + \dots + a^n$. Alors, on a

$$S_{n+1} = 1 + a + \dots + a^{n+1} = 1 + a(1 + \dots + a^n) = 1 + aS_n.$$

D'autre part, on a $a^{n+1} = S_{n+1} - S_n$ et donc

$$a_{n+1} = 1 + aS_n - S_n = 1 + (a - 1)S_n.$$

Si $|a| \neq 1$ on a $S_n = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$ et s'en suit alors que S_n diverge si $|a| > 1$ et converge si $|a| < 1$. Dans ce dernier cas on a $S_n \rightarrow \frac{1}{a-1}$. Enfin, la série diverge si $a = \pm 1$. En effet pour $a = 1$, il est clair que $S_n = n \rightarrow +\infty$. Pour $a = -1$, le terme général $a^n = (-1)^n$ ne tend pas vers zéro et donc la série diverge d'après la condition nécessaire de convergence des séries numériques.

Résultat fondamental :

La série $\sum_{n \geq 0} a^n$ converge si et seulement si $|a| < 1$ et sa somme est $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{a-1}$.

Definition 1.4. Soit $\sum u_n$ une série convergente. On appelle reste d'ordre n de cette série la quantité R_n donnée par

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k.$$

On a alors

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} u_k = S_n + R_n.$$

Proposition 1.5. Le reste d'ordre n d'une série convergente $\sum u_n$ tend vers 0, lorsque $n \rightarrow \infty$.

Preuve : En effet

$$R_n = \sum_{k=0}^{\infty} u_k - S_n = S - S_n \longrightarrow 0. \quad \square$$

Proposition 1.6. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries convergentes. Alors $\sum (u_n + \lambda v_n)$ converge pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

Preuve : Il suffit de passer aux suites partielles. \square

Proposition 1.7. On désigne par $\Re u_n$ (resp. $\Im u_n$) la partie réelle (resp. imaginaire) de u_n . Alors, on a

$$\sum u_n \text{ converge} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sum \Re u_n \\ \sum \Im u_n \end{array} \right. \text{ converge} \Leftrightarrow \sum \overline{u_n}.$$

Proposition 1.8. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries convergentes telles que $u_n \leq v_n$. Alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} v_n$$

1.2 Séries à termes dans \mathbb{R}^+

Lemme 1.9. Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs, $u_n \geq 0$. Alors $\sum u_n$ converge si et seulement si la suite des sommes partielles est majorée, c'est-à-dire $\exists M > 0$ tel que

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k \leq M, \forall n.$$

Preuve : La série $\sum u_n$ converge si et seulement si (par définition) la suite $(S_n)_n$ converge. Mais comme $(S_n)_n$ est croissante, puisque $u_n \geq 0$, on sait que $(S_n)_n$ converge si et seulement si elle est majorée. \square

Théorème 1.10 (Critères de convergence). Soient les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$. Alors on a

1. Si $0 \leq u_n \leq v_n$, alors on a $\sum v_n$ converge $\Rightarrow \sum u_n$ converge et $\sum u_n$ diverge $\Rightarrow \sum v_n$ diverge.
2. Si $u_n = O(v_n)$ avec $u_n \geq 0$ et $v_n \geq 0$, alors $\sum v_n$ converge $\Rightarrow \sum u_n$ converge.
3. Si $u_n \sim v_n$ pour $n \rightarrow +\infty$ et $v_n \geq 0$, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature
4. **Règle $n^\alpha u_n \rightarrow 0$:** S'il existe $\alpha > 1$ tel que $n^\alpha u_n \rightarrow 0$ alors $\sum u_n$ converge.
5. **Règle de Cauchy :** Soit $u_n \geq 0$ telle que $\sqrt[n]{u_n} \rightarrow l$, alors $\sum u_n$ converge si $l < 1$ et diverge si $l > 1$.
6. **Règle de D'Alembert :** Soit $u_n > 0$ telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow l$, alors $\sum u_n$ converge si $l < 1$ et diverge si $l > 1$.

Mise en garde : Le cas $l = 1$ dans les règles de Cauchy et D'Alembert est un cas qu'il conviendrait d'étudier à part dans chaque cas.

Exemple 1.11 (Exemple fondamental : Série de Riemann).

On considère la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Si $\alpha \leq 0$ alors $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge car $\frac{1}{n^\alpha} \not\rightarrow 0$.
- Si $\alpha = 1$ alors la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge (voir Exemples 1.3).
- Si $0 < \alpha < 1$, on a bien $\frac{1}{n} < \frac{1}{n^\alpha}$ est donc la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge d'après (1) du théorème précédent.
- Si $\alpha > 1$, alors on a

$$\frac{1}{n^\alpha} < \int_{n-1}^n \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1} \left(\frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}} \right)$$

et donc

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{\alpha-1} \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}} \right) = \frac{1}{\alpha-1} \left(1 - \frac{1}{N^{\alpha-1}} \right) \leq \frac{1}{\alpha-1}.$$

Il en résulte alors que $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge puisque la suite $S_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^\alpha}$ est majorée.

Résultat fondamental : La série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$; $\alpha \in \mathbb{R}$, converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Exemples 1.12.

1. $u_n = \frac{2^{2n}e^{-2n}}{n}$.

Par la règle de D'Alembert, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{2^{2(n+1)}e^{-2(n+1)}}{n+1}}{\frac{2^{2n}e^{-2n}}{n}} = \left(\frac{2}{e}\right)^2 \left(\frac{n}{n+1}\right) \longrightarrow \left(\frac{2}{e}\right)^2 < 1.$$

Donc $\sum \frac{2^{2n}e^{-2n}}{n}$ est convergente.

On peut utiliser aussi la règle de Cauchy.

2. $u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2}$.

Par la règle de Cauchy, on a

$$\sqrt[n]{u_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \rightarrow \frac{1}{e} < 1.$$

Alors $\sum \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ converge.

3. Soit $u_n = \left(\frac{an}{n+1}\right)^{n^2}$; $a \in \mathbb{R}^+$,

Par la règle de Cauchy, on a $\sqrt[n]{u_n} \left(\frac{a}{\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right)^n = \frac{a^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$

- $\sqrt[n]{u_n} \rightarrow 0$ si $a < 1$
- $\sqrt[n]{u_n} \rightarrow \frac{1}{e} < 1$ si $a = 1$
- $\sqrt[n]{u_n} \rightarrow +\infty$ si $a > 1$

Par suite, la série $\sum (u_n = \left(\frac{an}{n+1}\right)^{n^2})$; $a \in \mathbb{R}^+$, converge si et seulement si $a \leq 1$.

4. Soit $u_n = an \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - b \cos \frac{1}{n} + c \sin \frac{1}{n}$.

On sait que

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$\cos \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\sin \frac{1}{n} = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Il en résulte que

$$u_n = a - b + \left(c - \frac{a}{2}\right) \frac{1}{n} + \left(\frac{a}{3} + \frac{b}{2}\right) \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

- Si $a \neq b$ alors $u_n \rightarrow a - b \neq 0$, et donc $\sum u_n$ diverge.
- $a = b$ et $c \neq \frac{a}{2}$ alors $u_n \sim \alpha \frac{1}{n}$ et donc $\sum u_n$ diverge d'après (3) du théorème précédent (puisque $\sum \frac{1}{n}$ diverge).
- Si $a = b$, $c = -\frac{a}{2}$ et $\frac{a}{3} + \frac{b}{2} \neq 0$, alors $u_n \sim \alpha \frac{1}{n^2}$, donc $\sum u_n$ converge.
- Si $a = b$, $c = -\frac{a}{2}$ et $\frac{a}{3} + \frac{b}{2} = 0$, alors $u_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, donc $\sum u_n$ converge.

5. $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{\sin x}{1+x^2} dx.$

Pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{n}] \subset [0, \pi]$ on a $\frac{1}{1+\pi^2} \leq \frac{1}{1+x^2} \leq 1$. D'où,

$$\frac{\sin(x)}{1+x^2} \leq \sin(x)$$

car $\sin(x) \geq 0$ pour $x \in [0, \pi]$. On en déduit,

$$0 \leq u_n \leq \int_0^{\frac{\pi}{n}} \sin x dx = 1 - \cos \frac{\pi}{n} \sim \frac{\pi^2}{n^2}.$$

Donc $\sum u_n$ converge.

Definition 1.13. La série $\sum u_n$ est dite absolument convergente si la série à termes positifs $\sum |u_n|$ converge.

Proposition 1.14. Si la série $\sum u_n$ est absolument convergente, alors $\sum u_n$ converge

Preuve : Posons $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ et $T_n = \sum_{k=0}^n |u_k|$, on a

$$|S_{n+p} - S_n| = |u_{n+1} + \cdots + u_{n+p}| \leq |u_{n+1}| + \cdots + |u_{n+p}| = T_{n+p} - T_n.$$

Mais (T_n) converge par hypothèse, donc (T_n) est de Cauchy. Il en résulte que (S_n) est aussi de Cauchy, et donc converge. \square

1.3 Séries alternées

Définition 1.15. La série $\sum u_n$ est dite alternée si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = (-1)^n |u_n|$ ou $u_n = -(-1)^n |u_n|$.

Théorème 1.16. Soit $\sum u_n$ une série alternée. Si la suite $(|u_n|)_n$ décroît et $|u_n| \rightarrow 0$, alors $\sum u_n$ converge.

Preuve : Supposons que $u_n = (-1)^n |u_n|$, on a alors

$$S_{2p+2} - S_{2p} = u_{2p+1} + u_{2p+2} = -|u_{2p+1}| + |u_{2p+2}| \leq 0$$

et

$$S_{2p+3} - S_{2p+1} = u_{2p+2} + u_{2p+3} = -|u_{2p+2}| + |u_{2p+3}| \geq 0.$$

De plus

$$S_{2p+1} - S_{2p} = u_{2p+1} \rightarrow 0.$$

Ainsi, les deux suites extraites $(S_{2p})_p$ et $(S_{2p+1})_p$ sont adjacentes et donc S_{2p} et S_{2p+1} ont même limite. Ceci montre que $(S_n)_n$ converge. \square

Exemples 1.17.

1. On considère la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Si $\alpha \leq 0$, alors $\frac{(-1)^n}{n^\alpha} \not\rightarrow 0$ et donc la série diverge.
- Si $0 < \alpha \leq 1$, alors $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge d'après le théorème précédent.
- Si $\alpha > 1$, alors $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge absolument et donc $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge.

2. Soit $u_n = \frac{1}{n^2+1}((-1)^n n + a)$; $a \in \mathbb{R}$.

La série n'est pas absolument convergente, car $|u_n| \sim \frac{1}{n}$ et donc $\sum |u_n|$ ne converge pas. Pourtant, la série $\sum u_n$ est convergente. En effet, on a

$$u_n = \frac{(-1)^n n}{n^2+1} + \frac{a}{n^2+1} = v_n + w_n$$

où $v_n = \frac{(-1)^n n}{n^2+1}$ est une suite alternée \searrow_0 . Donc d'après le théorème précédent $\sum v_n$ converge. Comme $\sum w_n$ est aussi convergente (car $\frac{a}{n^2+1} \sim \frac{1}{n^2}$), on conclut alors que la série $\sum u_n$ est convergente.

Chapitre 2

Suites et Série de fonctions

2.1 Rappels

Soit $\mathbf{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} et $A \subset \mathbb{R}$. On note par $\mathfrak{F}(A, \mathbf{K})$ l'espace vectoriel sur \mathbf{K} des fonctions de A dans \mathbf{K} , $\mathfrak{F}(A, \mathbf{K}) = \{f : A \rightarrow \mathbf{K}\}$. On dit que $f \in \mathfrak{F}(A, \mathbf{K})$ est bornée si et seulement s'il existe une constante $M > 0$ tel que

$$|f(x)| \leq M, \forall x \in A.$$

On note par $\mathfrak{B}(A, \mathbf{K})$ le sous espace vectoriel de $\mathfrak{F}(A, \mathbf{K})$ constitué des fonctions bornées,

$$\mathfrak{B}(A, \mathbf{K}) = \{f \in \mathfrak{F}(A, \mathbf{K}), f \text{ bornée}\}.$$

Par $\mathfrak{C}(A, \mathbf{K})$ on désigne l'ensemble des fonctions continues de A dans \mathbf{K} . C'est un sous espace vectoriel de $\mathfrak{F}(A, \mathbf{K})$. Enfin, on définit la norme

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in A} |f(x)|.$$

Théorème 2.1. Soit $A = I = [a, b]$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $a < b$. Alors, toute fonction continue sur $[a, b]$ est bornée. De plus, il existe $x_1, x_2 \in [a, b]$ tels que $\inf_{x \in [a, b]} f(x) =$

$$f(x_1) \text{ et } \sup_{x \in [a, b]} f(x) = f(x_2),$$

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \forall x \in [a, b].$$

Théorème 2.2 (T.A.F). Soit $f \in \mathfrak{C}(A, \mathbf{K})$ une fonction dérivable. On suppose de plus que $|f'(x)| \leq M, \forall x \in A$. Alors, on a

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|, \quad \forall x, y \in A.$$

2.2 Suites de fonctions

Definition 2.3.

1. On dit que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement sur A vers la fonction f si pour tout $x \in A$, la suite numérique $(f_n(x))_n$ converge vers $f(x)$.
2. On dit que $(f_n)_n$ converge uniformément sur A vers f et on écrit $f_n \xrightarrow{\text{unif.}} f$ si $\sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)|$ converge vers 0. Cela signifie que la suite numérique $(\|f_n - f\|_\infty)_n$ converge vers 0.

Propriété 2.4. Si $f_n \xrightarrow{\text{unif.}} f$, alors $f_n \rightarrow f$ simplement.

Remarque pratique : Pour montrer que $f_n \xrightarrow{\text{unif.}} f$, on étudie $|f_n(x) - f(x)|$. On essaie de majorer $|f_n(x) - f(x)|$ par une quantité u_n indépendante de x telle que $u_n \rightarrow 0$.

Exemples 2.5.

1. Soit $(f_n(x)) = \frac{nx^3}{1+nx^2}$.

Pour $x = 0$ on a $f_n(0) \rightarrow 0$.

Si $x \neq 0$ on a $f_n(x) \rightarrow x$.

Alors, la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement sur \mathbb{R} vers la fonction $f(x) = x$. De plus, on a

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{|x|}{1+nx^2} \leq |x|.$$

- Si $|x| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$, alors $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$.
- Du fait que $\frac{nx^2}{1+nx^2} \leq 1$ on déduit que $\frac{n|x|}{1+nx^2} \leq \frac{1}{n|x|}$. Il s'ensuit alors que si $|x| \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$ on a

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{|x|}{1+nx^2} \leq \frac{1}{n|x|} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Par suite

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0.$$

Alors, la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge aussi uniformément sur \mathbb{R} vers la fonction $f(x) = x$.

2. On considère la suite de fonctions $f_n(x) = \ln(1 + \frac{x}{n})$.
Il est clair que cette suite converge simplement vers 0 sur \mathbb{R}^+ car

$$f_n(x) \sim \frac{x}{n} \quad \text{quand } n \longrightarrow +\infty.$$

Mais, elle ne converge pas uniformément sur \mathbb{R}^+ . En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, on a

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^+} |f_n(x) - 0| = \sup_{x \in \mathbb{R}^+} |f_n(x)| = +\infty.$$

Toutefois, elle converge uniformément vers 0 sur tout intervalle $[0, a]$ fermé borné de \mathbb{R}^+ ; en effet pour tout $x \in [0, a]$, on a $|f_n(x)| \leq \ln(1 + \frac{a}{n})$ et donc

$$\sup_{x \in [0, a]} |f_n(x)| \leq \ln(1 + \frac{a}{n}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Théorème 2.6. Soit $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ avec $I = [a, b]$. On suppose que $f_n \longrightarrow f$ uniformément sur I .

1. Si les f_n sont continues sur I , il en est de même de f .
2. Si les f_n sont intégrables alors f est intégrable et

$$\lim_n \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

3. On définit $F_n(x) = \int_a^x f_n(t) dt$ et $F(x) = \int_a^x f(t) dt$. Alors

$$F_n \xrightarrow{\text{unif.}} F \quad \text{sur } [a, b].$$

Preuve : On a

$$\begin{aligned} |F_n(x) - F(x)| &= \left| \int_a^x (f_n(t) - f(t)) dt \right| \\ &\leq \int_a^x |f_n(t) - f(t)| dt \\ &\leq \|f_n - f\|_\infty |x - a| \end{aligned}$$

Par suite

$$|F_n(x) - F(x)| \leq |b - a| \|f_n - f\| \longrightarrow 0.$$

□

Remarque et Exemple 2.7. On considère la suite des fonctions

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } x \in [0, n] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a bien

$$f_n \xrightarrow{\text{unif.}} 0,$$

mais

$$\int_0^{+\infty} f_n(t) dt = 1 \not\rightarrow 0.$$

Théorème 2.8. Le théorème précédent n'est plus vrai si I n'est pas un intervalle fermé borné. Soit $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une suite de fonctions vérifiant

i) Il existe $\alpha \in [a, b]$ tel que $f_n(\alpha) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l \in \mathbb{R}$

ii) $f'_n \xrightarrow{\text{unif.}} g$.

Alors $(f_n)_n$ converge uniformément vers une fonction f qui est la primitive de g prenant la valeur l au point α , et on a $f' = g$.

Preuve : Pour tout x fixé, on a

$$f_n(x) = f_n(\alpha) + \int_{\alpha}^x f'_n(t) dt.$$

Alors, par passage à la limite on obtient

$$\lim_n f_n(x) = l + \int_{\alpha}^x g(t) dt.$$

Si on pose $f(x) = l + \int_{\alpha}^x g(t) dt$, alors $\|f_n - f\|_{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ d'après le théorème précédent. En effet, posons

$$F_n(x) = \int_{\alpha}^x f'_n(t) dt = f_n(x) - f_n(\alpha)$$

et $F(x) = \int_{\alpha}^x g(t) dt$. On a donc d'après le théorème précédent $F_n \rightarrow F$ uniformément sur $[a, b]$. C'est à dire puisque $f_n(\alpha) \rightarrow l$:

$$f_n(x) \rightarrow l + \int_{\alpha}^x g(t) dt = f(x),$$

où f est la primitive de g qui prend la valeur l au point $x = \alpha$. □

2.3 Séries de fonctions

Definition 2.9.

1. On appelle *série de fonctions* un couple de deux suites $(f_n)_n$ et $(S_n)_n$ avec $S_n = \sum_{k \leq n} f_k$, on la note $\sum f_n$.
2. $\sum f_n$ converge simplement sur A si la suite $(S_n)_n$ converge simplement sur A , c'est-à-dire si et seulement si pour tout $x \in A$ la série numérique $\sum f_n(x)$ converge. La fonction $x \mapsto \sum_{k \geq n} f_k(x)$ est appelée *reste de la série* $\sum f_n$.

On note par $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ la somme de la série $\sum f_n$, i.e. la fonction f définie par

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x).$$

3. La série $\sum f_n$ converge uniformément sur A si et seulement si la suite de fonctions $(S_n)_n$ converge uniformément sur A : Autrement dit s'il existe une fonction $S : A \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\sup_{x \in A} |s_n(x) - s(x)| \longrightarrow_n 0.$$

4. La série $\sum f_n$ converge absolument sur A si la série $\sum |f_n|$ converge simplement sur A .
5. On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur A si et seulement si la série $\sum \|f_n\|_\infty$ converge dans \mathbb{R}^+ , avec

$$\|f\|_\infty \sup_{x \in A} |f_n(x)|.$$

Théorème 2.10.

1. Si la série $\sum f_n$ converge normalement, alors $\sum f_n$ converge uniformément, et donc $\sum f_n$ converge simplement.
2. La série $\sum f_n$ converge normalement si et seulement s'il existe une série $\sum u_n$ à termes positifs et convergente telle que

$$|f_n(x)| \leq u_n, \quad \forall x, \forall n.$$

Exemples 2.11.

1. Soit $f_n(x) = \sin \frac{nx}{n!}$.
On a

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{n!}.$$

La sa série numérique $\sum \frac{1}{n!}$ converge. Alors $\sum f_n$ converge normalement d'après 2) du théorème précédent.

2. Soit $f_n(x) = nx^2 e^{-x\sqrt{n}}$ sur \mathbb{R}^+ .

La série $\sum f_n$ converge simplement mais pas normalement sur \mathbb{R}^+ . En effet, pour tout n fixé, on a

$$f'_n(x) = nx(2 - x\sqrt{n})e^{-x\sqrt{n}}.$$

Le tableau de variation de la fonction $f_n(x)$ montre que

$$\|f_n\|_\infty = f_n\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right) = \frac{4}{e^2}.$$

Par suite la série numérique $\|f_n\|_\infty$ diverge et donc $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur \mathbb{R}^+ .

- Pourtant, pour un réel $a > 0$ et un entier $N \geq 0$ tel que $\frac{2}{\sqrt{N}} < a$, on a bien

$$\sup_{x>a} |f_n(x)| = f_n(a) = na^2 e^{-a\sqrt{n}}$$

et donc on a la convergence normale de la série $\sum f_n$ sur tout $[a, +\infty[; a > 0$.

- Notons aussi que comme $\|f_n\|_\infty = \frac{4}{e^2} \not\rightarrow 0$ alors la série $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$. Mais, elle converge uniformément sur tout $[a, +\infty[; a > 0$.

Théorème 2.12. Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur $I = [a, b]$. On suppose que $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$ et que les f_n sont continues. Alors

- La fonction $f = \sum f_n$ est continue.
- La série $\sum (\int_a^b f_n(t) dt)$ converge et on a

$$\int_a^b (\sum f_n(x)) dx = \sum (\int_a^b f_n(x) dx).$$

Théorème 2.13. Soit f_n une suite de fonctions de classe \mathcal{C}^1 vérifiant

- $\sum f_n$ converge simplement

ii) $\sum f'_n$ converge uniformément.

Alors, on a

- a. $\sum f_n$ converge uniformément.
- b. $f = \sum f_n$ est de classe \mathcal{C}^1 .
- c. $f' = (\sum f_n)' = \sum f'_n$.

Chapitre 3

Série entières

3.1 Définition et première propriétés

Definition 3.1. Une série entière est une série de fonctions f_n où $f_n(z) = a_n z^n$, autrement dit ce sont les séries de la forme

$$\sum a_n z^n, \quad a_n \in \mathbb{C}.$$

Lemme 3.2 (d'Abel). S'il existe $\rho \in \mathbb{C}$ tel que $\sum |a_n \rho^n|$ converge, alors pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \leq |\rho|$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

Definition 3.3 (théorème). Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. Alors, il existe $R \in [0, +\infty]$ tel que

- i) Si $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$, alors $\sum a_n z^n$ converge.
- ii) Si $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > R$, alors $\sum a_n z^n$ diverge.

R est appelé rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.

Exemple 3.4.

- La série $\sum z^n$ est de rayon de convergence $R = 1$, et elle diverge pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 1$.
- La série $\sum \frac{z^n}{n^2}$ est de rayon de convergence $R = 1$, et converge pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 1$.

Proposition 3.5 (Règle de D'Alembert). Si $\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = l \in [0, +\infty]$, alors le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est

$$R = \frac{1}{l}$$

avec les conventions $\frac{1}{0} = +\infty$ et $\frac{1}{+\infty} = 0$.

Proposition 3.6. Soit la série entière $\sum a_n x^n$. Alors la série entière dérivée $\sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1}$ a le même rayon de convergence que la série $\sum a_n x^n$.

Théorème 3.7.

1. $\sum a_n x^n$ converge normalement sur tout intervalle fermé borné contenu dans $] -R, R[= I_R$
2. La fonction $S(x) = \sum a_n x^n$ est continue sur I_R
3. $S(x)$ est de classe C^∞ sur I_R et on a pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}.$$

3.2 Développement en série entière

Definition 3.8. On dit qu'une fonction f est développable en série entière s'il existe une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence R tel que

$$f(x) = \sum a_n x^n, \quad x \in I \subset] -R, R[,$$

et on a f est de classe C^∞ sur I et

$$a_n = \frac{f^n(0)}{n!}.$$

Proposition 3.9. Si f est développable en série entière avec $f(x) = \sum a_n x^n$, alors

- i) Si f est pair, alors $a_{2p+1} = 0$.
- ii) Si f est impair, alors $a_{2p} = 0$.

Proposition 3.10. Soit $f : I =] -a, a[\longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction de classe C^∞ . Alors f est développable en série entière, (DES(0)), si et seulement s'il existe α tel que $0 < \alpha \leq a$ et des constantes $A > 0$ et $B > 0$ vérifiant

$$\forall x, \quad -\alpha < x < \alpha, \quad \text{on a} \quad |f^n(x)| \leq B.A^n n!.$$

Proposition 3.11. Soit $f : I =] -\alpha, \alpha[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞ de formule de Taylor avec reste intégral

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

Alors f est développable en série entière si et seulement s'il existe $\beta; 0 < \beta < \alpha$ tel que

$$R_n(f)(x) := f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \longrightarrow 0, \quad \forall x \in]-\beta, \beta[.$$

Preuve : Il est clair que si f est développable en série entière alors $R_n(f)(x) \longrightarrow 0$ sur $] -R, +R[$. Réciproquement, si $R_n(f)(x) \longrightarrow 0$ sur $] -\beta, \beta[$, alors

$$\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = f(x) - R_n(f)(x) \longrightarrow f(x).$$

De plus la série $\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ est de rayon de convergence $R \geq \beta > 0$. □

Exemples 3.12.

1. Soit $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$.

On a

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt.$$

Alors

$$\begin{aligned} \left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt \right| &\leq \max(1, e^x) \left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} dt \right| \\ &= \max(1, e^x) \left| \int_x^0 \frac{(u)^n}{n!} du \right| \\ &= \max(1, e^x) \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \end{aligned}$$

Il en résulte que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Par suite, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = f(x) - R_n(f)(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x).$$

Enfin, $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ est de rayon de convergence égale à $+\infty$.

2. $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$.

3. Soit $f(x) = \cos(x)$.

$$\begin{aligned} \cos(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{(2k)}}{(2k)!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \cos(t) dt \\ &= \left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \cos(t) dt \right| \leq \left| \int_0^x \frac{u^n}{n!} du \right| = \frac{|x^{n+1}|}{(n+1)!} \end{aligned}$$

4. $\ln(1-x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

Propriété 3.13 (Opérations). Soient f et g deux fonctions DES(0) avec $f(x) = \sum a_n x^n$ et $g(x) = \sum b_n x^n$. Alors

i) $f + g$ est DES(0) et on a $f + g = \sum (a_n + b_n) x^n$.

ii) $f \times g$ est DES(0) et on a $f \times g = \sum c_n x^n$ avec

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$$

iii) f' est DES(0) et on a $f' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$.

iv) $f^{(k)}$ est DSE(0).

v) Les primitives de f sont aussi DES(0).